EPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION : MATHEMATIQUES (II)

DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 6

Les deux problèmes à traiter sont indépendants. La rigueur des raisonnements et la clarté de leur présentation seront pris en compte dans la notation.

PROBLEME I

Soit E un ensemble de cardinal fini n et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. On notera $\{x_i\}\ i=1,n$ les éléments de E. On rappelle qu'une partition de E à k éléments est un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ noté $\{A_i\}_{i=1,k}$ tel que les A_i sont des parties non vides de E disjointes deux à deux et dont la réunion donne E. On note p_n le nombre de partitions de E et P_n^k le nombre de partitions de E à k éléments.

1) Calculer P_n^1 et P_n^k pour $k \geqslant n$. En déduire une expression de p_n en fonction des P_n^k. On posera par convention $P_n^0 = 0$.

2) Donner la relation qui lie P_{n+1}^k à P_n^k, P_n^{k-1} et k.

3) Soit θ_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (de classe C^∞) définie par

$$\theta_n(t) = e^{(e^t-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (P_n^k \cdot e^{kt})$$

a) Exprimer $\theta_n(0)$ en fonction de p_n

b) Montrer que $\theta_n'(t) = \theta_{n+1}(t)$

4) Déduire de ce qui précède une expression de p_n sous forme d'une sommation à deux indices (On pourra admettre les résultats de 3)b) et poser

$$e^{(e^t-1)} = \sum_{\ell=0}^{n} \cdot \frac{(e^t-1)^\ell}{\ell!} + t^{n+1} \cdot R_n(t)\Big)$$

5) On prend n = 3. Donner toutes les partitions de E .

PROBLEME II

On considère 3 réels u_0, v_0, w_0 vérifiant $u_0 > v_0 > w_0 > 0$ et les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par u_0, v_0, w_0 et $3u_{n+1} = u_n + v_n + w_n$, $3\log v_{n+1} = \log u_n + \log v_n + \log w_n$, $3/w_{n+1} = 1/u_n + 1/v_n + 1/w_n$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n > w_n > 0$

2) Etudier le signe de $u_n w_n - v_n^2$

3) Montrer que (u_n) et (w_n) sont adjacentes. Que peut-on dire des limites des trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ?

4) Calculer cette limite lorsque $u_0 w_0 - v_0^2 = 0$

5) Montrer que lorsque $u_0 w_0 \neq v_0^2$ la suite (v_n) est monotone et adjacente à l'une des deux autres.

• • •